PARTE I

Para os exercícios de programação linear abaixo, apresentar a modelagem do problema, a solução algébrica e a solução gráfica:

1. Uma confecção produz dois tipos de vestido: um casual e um de festa. O vestido casual consome 1 m^2 de tecido e 2 horas de trabalho, enquanto que o vestido de festa consome 2 m^2 de tecido e 5 horas de trabalho. A confecção dispõe de 32 m^2 de tecido e 72 horas de trabalho disponíveis. Sabendo-se que o lucro na venda do vestido casual é de R$ 15,00 e do vestido de festa é de R$ 35,00, em qual quantidade cada vestido deverá ser fabricado de modo a maximizar o lucro?

2. Uma confeitaria produz dois tipos de bolo de chocolate: tradicional e meio amargo. O bolo de chocolate tradicional usa, dentre outros ingredientes, 0,5 kg de farinha, 0,2 kg de chocolate e 4 ovos, enquanto o bolo de chocolate meio amargo usa 0,4 kg de farinha, 0,4 kg de chocolate e 6 ovos. A confeitaria dispõe de 12 kg de farinha, 8 kg de chocolate e 124 ovos. Sabendo-se que o lucro na venda do bolo de chocolate tradicional é de R$ 4,00 e do bolo de chocolate meio amargo é de R$ 5,00, em qual quantidade cada bolo deverá ser produzido de modo a maximizar o lucro?

3. Um paciente necessita ingerir diariamente 10 mg de vitamina A e 80 mg de vitamina C. Estas vitaminas podem ser encontradas na cenoura, que possui 5 mg de vitamina A e 230 mg de vitamina C por quilo, e no espinafre, que possui 25 mg de vitamina A e 90 miligramas de vitamina C por quilo. Sabendo-se que o custo da cenoura é de R$ 2,00 o quilo e do espinafre R$ 8,00 o quilo, em qual quantidade o paciente deve ingerir estes alimentos de modo a suprir a ingestão mínima diária de vitaminas ao menor custo possível?

4. Uma siderúrgica deseja combinar dois tipos de ligas metálicas a fim de criar uma nova liga. A Liga 1 possui 60% de ferro, 20% de cobre e 10% de zinco e custa R$ 40,00 o quilo, e a Liga 2 possui 40% de ferro, 30% de cobre e 30% de zinco e custa R$ 55,00 o quilo. A nova liga deve conter, no mínimo, 30% de ferro, 20% de cobre e 15% de zinco. Em qual quantidade a siderúrgica deve combinar estas ligas de modo que a nova liga contenha as quantidades mínimas de ferro, cobre e zinco ao menor custo possível?

5. Extra – refaça o exercício 1 considerando que o lucro na venda do vestido casual é de R$ 15,00 e do vestido de festa é de R$ 25,00. A qual conclusão se chega?

PARTE II

Resolver os exercícios de programação linear da PARTE I usando o Método Simplex.

PARTE III

Resolver os exercícios de programação linear da PARTE I usando o Excel Solver.

PARTE IV

Para os exercícios de problema de transporte abaixo, apresentar a modelagem do problema (incluindo a rede de transporte e o modelo de programação linear), a solução inicial pelo método do canto noroeste e pelo método de Vogel, de modo a minimizar os custos de transporte:

1. Uma empresa especializada na comercialização e distribuição de cestas básicas possui dois centros de distribuição que devem atender três regiões consumidoras. O primeiro centro de distribuição tem capacidade para armazenar 5 mil cestas básicas e o segundo 10 mil. A primeira região consumidora demanda 3 mil cestas básicas, a segunda 7 mil e a terceira 5 mil. O custo do transporte entre os centros de distribuição e as regiões consumidoras por unidade de produto está descrito na tabela abaixo:

		Regiões Consumidoras		
		1	**2**	**3**
Centros de Distribuição	**1**	*1*	*2*	*4*
	2	*3*	*1*	*2*

2. Uma indústria de pneumáticos possui três fábricas, que produzem respectivamente 7.500, 8.500 e 5.250 pneus por mês. Estes pneus são vendidos para quatro montadoras de veículos, que demandam respectivamente 5.000, 2.500, 3.750 e 10.000 pneus por mês. O custo do transporte entre as fábricas e as montadoras por unidade de produto está descrito na tabela abaixo:

		Montadoras			
		1	**2**	**3**	**4**
Fábricas	**1**	*6*	*5*	*4*	*7*
	2	*2*	*4*	*3*	*1*
	3	*4*	*1*	*5*	*6*

3. Cinco cidades recebem água potável de três reservatórios, que produzem respectivamente 20, 35 e 45 milhões de litros de água por mês. As cidades, por sua vez, demandam respectivamente 5, 25, 15, 35 e 20 milhões de litros de água por mês. O custo de distribuição entre os reservatórios e as cidades por milhão de litros de água está descrito na tabela abaixo:

		Cidades				
		1	**2**	**3**	**4**	**5**
Reservatórios	**1**	*2*	*2*	*4*	*7*	*9*
	2	*4*	*1*	*3*	*2*	*8*
	3	*3*	*2*	*2*	*9*	*5*

4. Cinco regiões metropolitanas recebem energia elétrica de quatro hidrelétricas, que produzem respectivamente 10, 8, 5 e 3 megawatts/hora. As regiões metropolitanas, por sua vez, demandam respectivamente 2, 5, 8, 4 e 7 megawatts/hora. O custo de distribuição entre as hidrelétricas e as regiões metropolitanas por megawatt/hora está descrito na tabela abaixo:

		Regiões Metropolitanas				
		1	**2**	**3**	**4**	**5**
Hidrelétricas	**1**	*1*	*5*	*4*	*3*	*2*
	2	*6*	*4*	*2*	*1*	*4*
	3	*3*	*7*	*6*	*5*	*8*
	4	*2*	*3*	*1*	*7*	*5*

PARTE V

Resolver os exercícios de problema de transporte da PARTE IV usando o Excel Solver.

APÊNDICE I

Resolvendo um problema de maximização pelo Método Simplex[1]:

Maximizar $3x+5y$ Sujeito a

$$2x+4y \le 10$$
$$6x+y \le 20$$
$$x-y \le 30$$

Restrição de não negatividade $x, y \ge 0$

Para resolver um problema de maximização pelo Método Simplex, deve-se transformar a função objetiva e as inequações em equações.

Para transformar a função objetiva em uma equação, acrescentasse a variável Z e movem-se todas as incógnitas para o primeiro membro:

$$3x+5y$$
$$3x+5y=Z$$
$$Z-3x-5y=0$$

Para transformar as inequações em equações, basta inserir uma variável de folga em cada equação:

$$2x+4y+f_1=10$$
$$6x+y+f_2=20$$
$$x-y+f_3=30$$

Que dará origem então à forma canônica:

$$Z-3x-5y=0$$
$$2x+4y+f_1=10$$
$$6x+y+f_2=20$$
$$x-y+f_3=30$$

Que transposta para a forma tabular fica da seguinte forma:

Z	x	y	f_1	f_2	f_3	b
1	-3	-5	0	0	0	0
0	2	4	1	0	0	10
0	6	1	0	1	0	20
0	1	-1	0	0	1	30

Assim, uma vez estabelecida a forma canônica e transposta para a forma tabular, deve-se adotar os seguintes passos para a resolução do problema:

[1] Professor Mestre Matusalém Vieira Martins - http://www.professormatusalem.com

1º Passo – identificar a variável que entra.

Procurar na primeira linha da tabela o menor número, que no caso é -5:

Z	*x*	*y*	f_1	f_2	f_3	*b*
1	-3	-5	0	0	0	0
0	2	4	1	0	0	10
0	6	1	0	1	0	20
0	1	-1	0	0	1	30

2º Passo – identificar a linha que sai, também conhecida como linha pivô:

Escolher a linha em que o resultado da divisão do termo independente pela coluna escolhida no passo anterior é o menor positivo:

Z	*x*	*y*	f_1	f_2	f_3	*b*	
1	-3	-5	0	0	0	0	
0	2	4	1	0	0	10	10/4=2,5
0	6	1	0	1	0	20	20/1=20
0	1	-1	0	0	1	30	30/-1=-30

3º Passo – identificar o elemento pivô.

Selecionar o elemento que está na intersecção da coluna que contém a variável que entra com a linha pivô:

Z	*x*	*y*	f_1	f_2	f_3	*b*	
1	-3	-5	0	0	0	0	
0	2	4	1	0	0	10	10/4=2,5
0	6	1	0	1	0	20	20/1=20
0	1	-1	0	0	1	30	30/-1=-30

4º Passo – calcular a nova linha pivô.

Dividir todos os elementos da linha pivô pelo elemento pivô:

0	2	4	1	0	0	10
			dividir por 4			
0	0,5	1	0,25	0	0	2,5

5º Passo – calcular a primeira nova linha da tabela.

Primeiro multiplica-se todos os elementos da nova linha pivô pelo oposto do elemento correspondente da coluna que entra localizado na primeira linha, e então se somam a estes os elementos da primeira linha:

0	0,5	1	0,25	0	0	2,5
			multiplicar por 5			
0	2,5	5	1,25	0	0	12,5
			+			
1	-3	-5	0	0	0	0
			=			
1	-0,5	0	1,25	0	0	12,5

6º Passo – calcular a terceira nova linha da tabela. OBS.: a segunda linha é a linha pivô!

Primeiro multiplica-se todos os elementos da nova linha pivô pelo oposto do elemento correspondente da coluna que entra localizado na terceira linha, e então se somam a estes os elementos da terceira linha:

0	0,5	1	0,25	0	0	2,5
			multiplicar por -1			
0	-0,5	-1	-0,25	0	0	-2,5
			+			
0	6	1	0	1	0	20
			=			
1	5,5	0	-0,25	1	0	17,5

7º Passo – calcular a quarta nova linha da tabela.

Primeiro multiplica-se todos os elementos da nova linha pivô pelo oposto do elemento correspondente da coluna que entra localizado na quarta linha, e então se somam a estes os elementos da quarta linha:

0	0,5	1	0,25	0	0	2,5
			multiplicar por 1			
0	0,5	1	0,25	0	0	2,5
			+			
0	1	-1	0	0	1	30
			=			
0	1,5	0	0,25	0	1	32,5

8º Passo – montar a nova tabela.

Transcrever para a tabela as novas linhas calculadas:

Z	x	y	f_1	f_2	f_3	b
1	-0,5	0	1,25	0	0	12,5
0	0,5	1	0,25	0	0	2,5
0	5,5	0	-0,25	1	0	17,5
0	1,5	0	0,25	0	1	32,5

Solução:

Variáveis básicas	Variáveis não básicas	Valor de Z
$y=2,5$ $f_2=17,5$ $f_3=32,5$	$x=0$ $f_1=0$	$Z=12,5$

As variáveis básicas são aquelas cujo valor encontra-se expandindo-se a intersecção dos valores iguais a 1 da segunda, terceira e quarta linhas da tabela.

Variável básica y:

Z	*x*	*y*	*f_1*	*f_2*	*f_3*	*b*
1	-0,5	0	1,25	0	0	12,5
0	0,5	1	0,25	0	0	2,5
0	5,5	0	-0,25	1	0	17,5
0	1,5	0	0,25	0	1	32,5

Variável básica f_2:

Z	*x*	*y*	*f_1*	*f_2*	*f_3*	*b*
1	-0,5	0	1,25	0	0	12,5
0	0,5	1	0,25	0	0	2,5
0	5,5	0	-0,25	1	0	17,5
0	1,5	0	0,25	0	1	32,5

Variável básica f_3:

Z	*x*	*y*	*f_1*	*f_2*	*f_3*	*b*
1	-0,5	0	1,25	0	0	12,5
0	0,5	1	0,25	0	0	2,5
0	5,5	0	-0,25	1	0	17,5
0	1,5	0	0,25	0	1	32,5

As variáveis não básicas são aquelas que necessitam ser multiplicadas por zero para se anularem.

A variável Z é o valor que se deseja alcançar com a maximização da função objetiva.

No entanto, a solução encontrada não é ótima, pois na primeira linha, a da função objetiva, existem valores negativos. Assim, deve-se proceder aos cálculos novamente.

1º Passo – identificar a variável que entra.

Procurar na primeira linha da tabela o menor número, que no caso é -0,5:

Z	*x*	*y*	*f_1*	*f_2*	*f_3*	*b*
1	-0,5	0	1,25	0	0	12,5
0	0,5	1	0,25	0	0	2,5
0	5,5	0	-0,25	1	0	17,5
0	1,5	0	0,25	0	1	32,5

2º Passo – identificar a linha que sai, também conhecida como linha pivô:

Escolher a linha em que o resultado da divisão do termo independente pela coluna escolhida no passo anterior é o menor positivo:

Z	*x*	*y*	*f_1*	*f_2*	*f_3*	*b*	
1	-0,5	0	1,25	0	0	12,5	
0	0,5	1	0,25	0	0	2,5	2,5/0,5=5
0	5,5	0	-0,25	1	0	17,5	17,5/5,5=3,18
0	1,5	0	0,25	0	1	32,5	32,5/1,5=21,67

3º Passo – identificar o elemento pivô.

Selecionar o elemento que está na intersecção da coluna que contém a variável que entra com a linha pivô:

Z	***x***	***y***	***f_1***	***f_2***	***f_3***	***b***	
1	-0,5	0	1,25	0	0	12,5	
0	0,5	1	0,25	0	0	2,5	2,5/0,5=5
0	**5,5**	0	-0,25	1	0	17,5	17,5/5,5=3,18
0	1,5	0	0,25	0	1	32,5	32,5/1,5=21,67

4º Passo – calcular a nova linha pivô.

Dividir todos os elementos da linha pivô pelo elemento pivô:

0	5,5	0	-0,25	1	0	17,5
			dividir por 5,5			
0	1	0	-0,045	0,182	0	3,18

5º Passo – calcular a primeira nova linha da tabela.

Primeiro multiplica-se todos os elementos da nova linha pivô pelo oposto do elemento correspondente da coluna que entra localizado na primeira linha, e então se somam a estes os elementos da primeira linha:

0	1	0	-0,045	0,182	0	3,18
			multiplicar por 0,5			
0	0,5	0	-0,025	0,091	0	1,59
			+			
1	-05	0	1,25	0	0	12,5
			=			
1	0	0	1,227	0,091	0	14,09

6º Passo – calcular a segunda nova linha da tabela.

Primeiro multiplica-se todos os elementos da nova linha pivô pelo oposto do elemento correspondente da coluna que entra localizado na segunda linha, e então se somam a estes os elementos da segunda linha:

0	1	0	-0,045	0,182	0	3,18
			multiplicar por -0,5			
0	-0,5	0	0,023	-0,091	0	-1,59
			+			
0	0,5	1	0,25	0	0	2,5
			=			
0	0	1	0,273	-0,091	0	0,91

7º Passo – calcular a quarta nova linha da tabela. OBS.: a terceira linha é a linha pivô!

Primeiro multiplica-se todos os elementos da nova linha pivô pelo oposto do elemento correspondente da coluna que entra localizado na quarta linha, e então se somam a estes os elementos da quarta linha:

0	1	0	-0,045	0,182	0	3,18
			multiplicar por -1,5			
0	-1,5	0	0,068	-0,273	0	-4,77
			+			
0	1,5	0	0,25	0	1	32,5
			=			
0	0	0	0,318	-0,273	1	27,73

8º Passo – montar a nova tabela.

Transcrever para a tabela as novas linhas calculadas:

Z	***x***	***y***	f_1	f_2	f_3	***b***
1	0	0	1,227	0,091	0	14,09
0	0	1	0,273	-0,091	0	0,91
0	1	0	-0,045	0,182	0	3,18
0	0	0	0,318	-0,273	1	27,73

Solução:

Variáveis básicas	Variáveis não básicas	Valor de Z
$x=3,18$ $y=0,91$ $f_3=27,73$	$f_1=0$ $f_2=0$	$Z=14,09$

As variáveis básicas são aquelas cujo valor encontra-se expandindo-se a intersecção dos valores iguais a 1 da segunda, terceira e quarta linhas da tabela.

Variável básica x:

Z	***x***	***y***	f_1	f_2	f_3	***b***
1	0	0	1,227	0,091	0	14,09
0	0	1	0,273	-0,091	0	0,91
0	1	0	-0,045	0,182	0	3,18
0	0	0	0,318	-0,273	1	27,73

Variável básica y:

Z	***x***	***y***	f_1	f_2	f_3	***b***
1	0	0	1,227	0,091	0	14,09
0	0	1	0,273	-0,091	0	0,91
0	1	0	-0,045	0,182	0	3,18
0	0	0	0,318	-0,273	1	27,73

Variável básica f_3:

Z	x	y	f_1	f_2	f_3	b
1	0	0	1,227	0,091	0	14,09
0	0	1	0,273	-0,091	0	0,91
0	1	0	-0,045	0,182	0	3,18
0	0	0	0,318	-0,273	1	27,73

As variáveis não básicas são aquelas que necessitam ser multiplicadas por zero para se anularem.

A variável Z é o valor que se deseja alcançar com a maximização da função objetiva.

Neste caso, a solução encontrada é ótima, pois na primeira linha, a da função objetiva, não há nenhum valor negativo. Assim, alcançamos a resolução do problema.

APÊNDICE II

Resolvendo um problema de minimização pelo Método Simplex[2]:

Minimizar $3x+2y$ Sujeito a $2x+y \geq 10$
$x+5y \geq 15$

Restrição de não negatividade $x, y \geq 0$

Para resolver um problema de minimização pelo Método Simplex, deve-se transformar a função objetiva e as inequações em equações e usar uma função auxiliar denominada W.

Para transformar a função objetiva em uma equação, acrescenta-se a variável Z e multiplica-se por -1 e movem-se todas as incógnitas para o primeiro membro:

$$3x+2y$$
$$3x+2y=Z$$
$$Z-3x-2y=0$$
$$\times(-1)$$
$$-Z+3x+2y=0$$

Para transformar as inequações em equações, basta inserir uma variável de folga em cada equação com sinal negativo e uma variável auxiliar:

$$2x+y-f_1+a_1=10$$
$$x+5y-f_2+a_2=15$$

Para encontrar a função auxiliar W, somam-se as duas funções acima com as variáveis auxiliares isoladas no primeiro membro e depois multiplica-se por -1:

$$a_1=-2x-y+f_1+10$$
$$+$$
$$a_2=-x-5y+f_2+15$$
$$=$$
$$W=a_1+a_2=-3x-6y+f_1+f_2+25$$
$$\times(-1)$$
$$-W=3x+6y-f_1-f_2-25$$

[2] Professor Mestre Matusalém Vieira Martins - http://www.professormatusalem.com

Que dará origem então à forma canônica:

$$-Z + 3x + 2y = 0$$
$$2x + y - f_1 + a_1 = 10$$
$$x + 5y - f_2 + a_2 = 15$$
$$-W = 3x + 6y - f_1 - f_2 - 25$$

Que transposta para a forma tabular fica da seguinte forma:

Z	x	y	f_1	f_2	a_1	a_2	b
-1	3	2	0	0	0	0	0
0	2	1	-1	0	1	0	10
0	1	5	0	-1	0	1	15
-1	-3	-6	1	1	0	0	-25

Assim, uma vez estabelecida a forma canônica e transposta para a forma tabular, deve-se adotar os seguintes passos para a resolução do problema:

1º Passo – identificar a variável que entra.

Procurar na última linha da tabela o menor número, que no caso é -6:

Z	x	y	f_1	f_2	a_1	a_2	b
-1	3	2	0	0	0	0	0
0	2	1	-1	0	1	0	10
0	1	5	0	-1	0	1	15
-1	-3	-6	1	1	0	0	-25

2º Passo – identificar a linha que sai, também conhecida como linha pivô:

Escolher a linha em que o resultado da divisão do termo independente pela coluna escolhida no passo anterior é o menor positivo:

Z	x	y	f_1	f_2	a_1	a_2	b	
-1	3	2	0	0	0	0	0	
0	2	1	-1	0	1	0	10	10/1=10
0	1	5	0	-1	0	1	15	15/5=3
-1	-3	-6	1	1	0	0	-25	

3º Passo – identificar o elemento pivô.

Selecionar o elemento que está na intersecção da coluna que contém a variável que entra com a linha pivô:

Z	x	y	f_1	f_2	a_1	a_2	b	
-1	3	2	0	0	0	0	0	
0	2	1	-1	0	1	0	10	10/1=10
0	1	**5**	0	-1	0	1	15	15/5=3
-1	-3	-6	1	1	0	0	-25	

4º Passo – calcular a nova linha pivô.

Dividir todos os elementos da linha pivô pelo elemento pivô:

0	1	5	0	-1	0	1	15
			dividir por 5				
0	0,2	1	0	-0,2	0	0,2	3

5º Passo – calcular a primeira nova linha da tabela.

Primeiro multiplica-se todos os elementos da nova linha pivô pelo oposto do elemento correspondente da coluna que entra localizado na primeira linha, e então se somam a estes os elementos da primeira linha:

0	0,2	1	0	-0,2	0	0,2	3
			multiplicar por -2				
0	-0,4	-2	0	0,4	0	0,4	-6
			+				
-1	3	2	0	0	0	0	0
			=				
-1	2,6	0	0	0,4	0	-0,4	-6

6º Passo – calcular a segunda nova linha da tabela.

Primeiro multiplica-se todos os elementos da nova linha pivô pelo oposto do elemento correspondente da coluna que entra localizado na segunda linha, e então se somam a estes os elementos da segunda linha:

0	0,2	1	0	-0,2	0	0,2	3
			multiplicar por -1				
0	-0,2	-1	0	0,2	0	-0,2	-3
			+				
0	2	1	-1	0	1	0	10
			=				
0	1,8	0	-1	0,2	1	-0,2	7

7º Passo – calcular a quarta nova linha da tabela. OBS.: a terceira linha é a linha pivô!

Primeiro multiplica-se todos os elementos da nova linha pivô pelo oposto do elemento correspondente da coluna que entra localizado na quarta linha, e então se somam a estes os elementos da quarta linha:

0	0,2	1	0	-0,2	0	0,2	3
			multiplicar por 6				
0	1,2	6	0	-1,2	0	1,2	18
			+				
-1	-3	-6	1	1	0	0	-25
			=				
-1	-1,8	0	1	-0,2	0	1,2	-7

8º Passo – montar a nova tabela.

Transcrever para a tabela as novas linhas calculadas:

Z	*x*	*y*	f_1	f_2	a_1	a_2	*b*
-1	2,6	0	0	0,4	0	-0,4	-6
0	1,8	0	-1	0,2	1	-0,2	7
0	0,2	1	0	-0,2	0	0,2	3
-1	-1,8	0	1	-0,2	0	1,2	-7

Solução:

Variáveis básicas	Variáveis não básicas	Valor de W
$y=3$ $a_1=7$	$x=0$ $f_1=0$ $f_2=0$ $a_2=0$	$-W=-7$

As variáveis básicas são aquelas cujo valor encontra-se expandindo-se a intersecção dos valores 1 e 0 da primeira e terceira linha da tabela.

Variável básica y:

Z	*x*	*y*	f_1	f_2	a_1	a_2	*b*
-1	2,6	0	0	0,4	0	-0,4	-6
0	1,8	0	-1	0,2	1	-0,2	7
0	0,2	1	0	-0,2	0	0,2	3
-1	-1,8	0	1	-0,2	0	1,2	-7

Variável básica a_1:

Z	*x*	*y*	f_1	f_2	a_1	a_2	*b*
-1	2,6	0	0	0,4	0	-0,4	-6
0	1,8	0	-1	0,2	1	-0,2	7
0	0,2	1	0	-0,2	0	0,2	3
-1	-1,8	0	1	-0,2	0	1,2	-7

As variáveis não básicas são aquelas que necessitam ser multiplicadas por zero para se anularem.

A variável -W é o valor que se deseja alcançar com a minimização da função objetiva.

No entanto, a solução encontrada não é ótima, pois os valores a_1 e W que formam a função auxiliar não foram zerados (somente a_2). Assim, deve-se proceder aos cálculos novamente.

1º Passo – identificar a variável que entra.

Procurar na última linha da tabela o menor número, que no caso é -1,8:

Z	x	y	f_1	f_2	a_1	a_2	b
-1	2,6	0	0	0,4	0	-0,4	-6
0	1,8	0	-1	0,2	1	-0,2	7
0	0,2	1	0	-0,2	0	0,2	3
-1	-1,8	0	1	-0,2	0	1,2	-7

2º Passo – identificar a linha que sai, também conhecida como linha pivô:

Escolher a linha em que o resultado da divisão do termo independente pela coluna escolhida no passo anterior é o menor positivo:

Z	x	y	f_1	f_2	a_1	a_2	b	
-1	2,6	0	0	0,4	0	-0,4	-6	
0	1,8	0	-1	0,2	1	-0,2	7	7/1,8=3,89
0	0,2	1	0	-0,2	0	0,2	3	3/0,2=15
-1	-1,8	0	1	-0,2	0	1,2	-7	

3º Passo – identificar o elemento pivô.

Selecionar o elemento que está na intersecção da coluna que contém a variável que entra com a linha pivô:

Z	x	y	f_1	f_2	a_1	a_2	b	
-1	2,6	0	0	0,4	0	-0,4	-6	
0	**1,8**	0	-1	0,2	1	-0,2	7	7/1,8=3,89
0	0,2	1	0	-0,2	0	0,2	3	3/0,2=15
-1	-1,8	0	1	-0,2	0	1,2	-7	

4º Passo – calcular a nova linha pivô.

Dividir todos os elementos da linha pivô pelo elemento pivô:

0	1,8	0	-1	0,2	1	-0,2	7
			dividir por 1,8				
0	1	0	-0,56	0,11	0,56	-0,11	3,89

5º Passo – calcular a primeira nova linha da tabela.

Primeiro multiplica-se todos os elementos da nova linha pivô pelo oposto do elemento correspondente da coluna que entra localizado na primeira linha, e então se somam a estes os elementos da primeira linha:

0	1	0	-0,56	0,11	0,56	-0,11	3,89
			multiplicar por -2,6				
0	-2,6	0	1,46	-0,29	-1,46	0,29	-10,11
			+				
-1	2,6	0	0	0,4	0	-0,4	-6
			=				
-1	0	0	1,46	0,11	-1,46	-0,11	-16,11

6º Passo – calcular a terceira nova linha da tabela. OBS.: a segunda linha é a linha pivô!

Primeiro multiplica-se todos os elementos da nova linha pivô pelo oposto do elemento correspondente da coluna que entra localizado na terceira linha, e então se somam a estes os elementos da terceira linha:

0	1	0	-0,56	0,11	0,56	-0,11	3,89
			multiplicar por -0,2				
0	-0,2	0	0,11	-0,02	-0,11	0,02	0,78
			+				
0	0,2	1	0	-0,2	0	0,2	3
			=				
0	0	1	0,11	-0,22	-0,11	0,22	3,78

7º Passo – calcular a quarta nova linha da tabela.

Primeiro multiplica-se todos os elementos da nova linha pivô pelo oposto do elemento correspondente da coluna que entra localizado na quarta linha, e então se somam a estes os elementos da quarta linha:

0	1	0	-0,56	0,11	0,56	-0,11	3,89
			multiplicar por 1,8				
0	1,8	0	-1	0,2	1	-0,2	7
			+				
-1	-1,8	0	1	-0,2	0	1,2	-7
			=				
-1	0	0	0	0	1	1	0

8º Passo – montar a nova tabela.

Transcrever para a tabela as novas linhas calculadas:

Z	**x**	**y**	f_1	f_2	a_1	a_2	**b**
-1	0	0	1,46	0,11	-1,46	-0,11	-16,11
0	1	0	-0,56	0,11	0,56	-0,11	3,89
0	0	1	0,11	-0,22	-0,11	0,22	3,78
-1	0	0	0	0	1	1	0

Solução:

Variáveis básicas	Variáveis não básicas	Valor de W
$x=3{,}89$ $y=3{,}78$	$f_1=0$ $f_2=0$ $a_1=0$ $a_2=0$	$-W=0$

As variáveis básicas são aquelas cujo valor encontra-se expandindo-se a intersecção dos valores iguais a 1 da segunda e terceira linha da tabela.

Variável básica x:

Z	x	y	f_1	f_2	a_1	a_2	b
-1	0	0	1,46	0,11	-1,46	-0,11	-16,11
0	1	0	-0,56	0,11	0,56	-0,11	3,89
0	0	1	0,11	-0,22	-0,11	0,22	3,78
-1	0	0	0	0	1	1	0

Variável básica y:

Z	x	y	f_1	f_2	a_1	a_2	b
-1	0	0	1,46	0,11	-1,46	-0,11	-16,11
0	1	0	-0,56	0,11	0,56	-0,11	3,89
0	0	1	0,11	-0,22	-0,11	0,22	3,78
-1	0	0	0	0	1	1	0

As variáveis não básicas são aquelas que necessitam ser multiplicadas por zero para se anularem.

A variável -W é o valor que se deseja alcançar com a minimização da função objetiva.

Neste caso, conseguiu-se eliminar a função auxiliar, pois os valores a_1, a_2 e W foram zerados. Assim, a função auxiliar pode ser eliminada da tabela:

Z	x	y	f_1	f_2	a_1	a_2	b
-1	0	0	1,46	0,11	-1,46	-0,11	-16,11
0	1	0	-0,56	0,11	0,56	-0,11	3,89
0	0	1	0,11	-0,22	-0,11	0,22	3,78
-1	0	0	0	0	1	1	0

E tem-se então uma nova tabela:

Z	x	y	f_1	f_2	b
-1	0	0	1,46	0,11	-16,11
0	1	0	-0,56	0,11	3,89
0	0	1	0,11	-0,22	3,78

Solução:

Variáveis básicas	Variáveis não básicas	Valor de Z
$x=3,89$ $y=3,78$	$f_1=0$ $f_2=0$	$-Z=-16,11$

As variáveis básicas são aquelas cujo valor encontra-se expandindo-se a intersecção dos valores iguais a 1 da segunda e terceira linha da tabela.

Variável básica x:

Z	x	y	f_1	f_2	b
-1	0	0	1,46	0,11	-16,11
0	1	0	-0,56	0,11	3,89
0	0	1	0,11	-0,22	3,78

Variável básica y:

Z	*x*	*y*	f_1	f_2	*b*
-1	0	0	1,46	0,11	-16,11
0	1	0	-0,56	0,11	3,89
0	0	1	0,11	-0,22	3,78

As variáveis não básicas são aquelas que necessitam ser multiplicadas por zero para se anularem.

A variável Z é o valor que se deseja alcançar com a minimização da função objetiva.

Neste caso, a solução encontrada é ótima, pois na primeira linha, a da função objetiva, não há nenhum valor negativo. Assim, alcançamos a resolução do problema.

APÊNDICE III

Resolvendo um problema de maximização pelo Excel Solver:

Uma fábrica produz dois produtos, A e B. Cada um deles deve ser processado por duas máquinas, M_1 e M_2. Devido à programação de outros produtos, que também utilizam estas máquinas, a máquina M_1 tem 24 horas de tempo disponível para os produtos A e B, enquanto a máquina M_2 tem 16 horas de tempo disponível. Para produzir uma unidade do produto A, gastam-se 4 horas em cada uma das máquinas M_1 e M_2. Para produzir uma unidade do produto B, gastam-se 6 horas na máquina M_1 e 2 horas na máquina M_2. Cada unidade vendida do produto A gera um lucro de R$ 80 e cada unidade do produto B, um lucro de R$ 60. Existe uma previsão máxima de demanda para o produto B de 3 unidades, não havendo restrições quanto à demanda do produto A. Deseja-se saber quantas unidades de A e de B devem ser produzidas, de forma a maximizar o lucro e, ao mesmo tempo, obedecer a todas as restrições desse enunciado.[3]

Problema transportado para o Excel:

E2 | fx =SOMARPRODUTO(B2:C2;B3:C3)

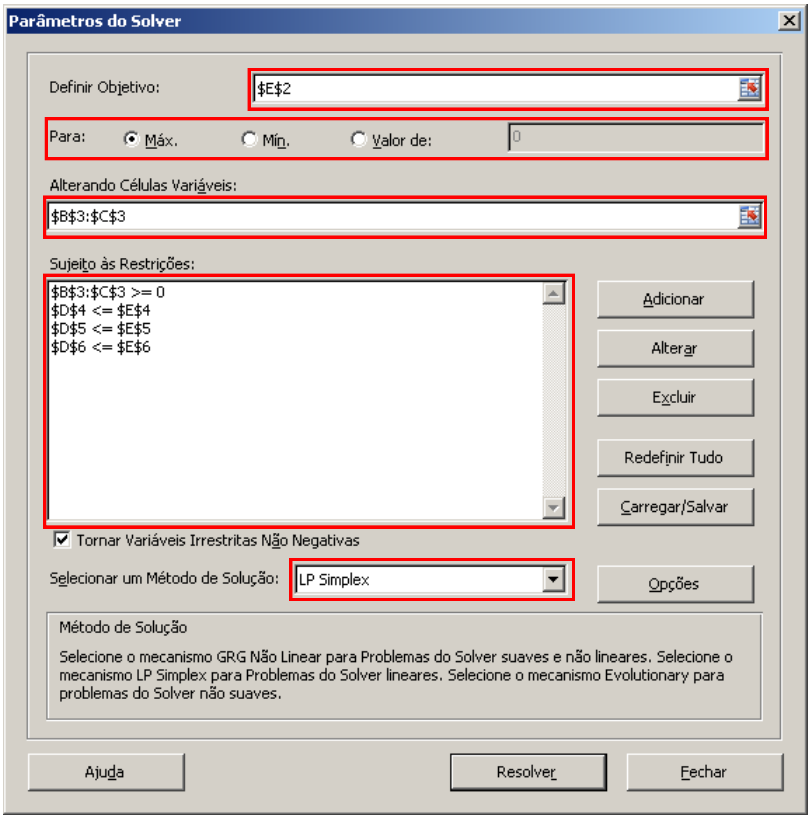
	A	B	C	D	E
1		**Produto A (x)**	**Produto B (y)**		
2	**Função Objetiva**	80	60	Z=	0
3	**Quantidade**	0	0		
4	**Restrição M_1**	4	6	0	24
5	**Restrição M_2**	4	2	0	16
6	**Restrição Demanda**	-	1	0	3
7					
8	Maximizar:	80x+60y			
9					
10	Sujeito a:	4x+6y≤24			
11		4x+2y≤16			
12		y≤3			
13					
14	Restrição de não negatividade:	x≥0 e y≥0			

Fórmulas:

CÉLULA	FÓRMULA
E2	=SOMARPRODUTO(B2:C2;B3:C3)
D4	=SOMARPRODUTO(B3:C3;B4:C4)
D5	=SOMARPRODUTO(B3:C3;B5:C5)
D6	=SOMARPRODUTO(C3;C6)

[3] MOREIRA, Daniel Augusto, **Pesquisa Operacional** - Curso Introdutório - 2ª Edição. São Paulo: Cengage Learning, 2010

Configuração do Solver:

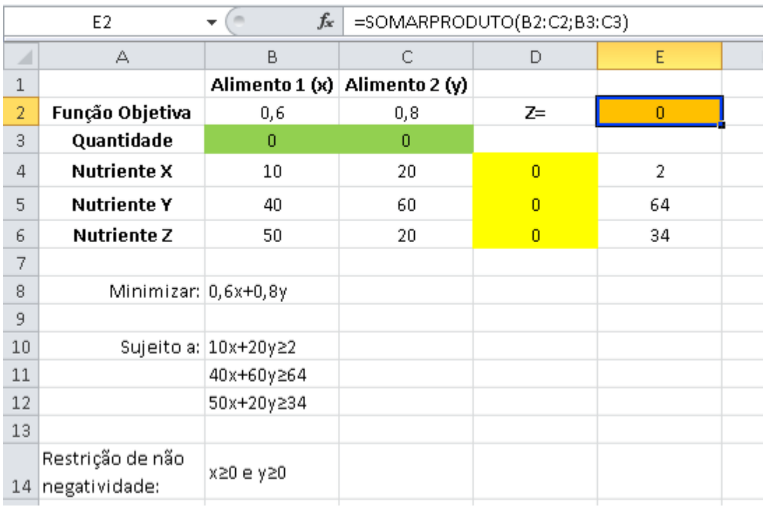


APÊNDICE IV

Resolvendo um problema de minimização pelo Excel Solver:

A Granja Cocoró quer misturar dois tipos de alimentos para criar um tipo especial de ração para suas galinhas poedeiras. A primeira característica a ser atingida com a nova ração é o menor preço possível por unidade de peso. Cada um dos alimentos contém os nutrientes necessários à ração final (aqui chamados de nutrientes X, Y e Z), porém em proporções variáveis. Cada 100 g do Alimento 1, por exemplo, possuem 10 g do nutriente X, 40 g do nutriente Y e 50 g do nutriente Z. O Alimento 2, por sua vez, para cada 100 g, possui 20 g do nutriente X, 60 g do nutriente Y e 20 g do nutriente Z. Cada 100 g do Alimento 1 custam, para a Granja Cocoró, R$ 0,60 e cada 100 g do Alimento 2 custam R$ 0,80. Sabe-se que a ração final deve conter, no mínimo, 2 g do nutriente X, 64 g do nutriente Y e 34 g do nutriente Z. É preciso obedecer a essa composição, minimizando ao mesmo tempo o custo por peso da nova ração.[4]

Problema transportado para o Excel:


E2 =SOMARPRODUTO(B2:C2;B3:C3)

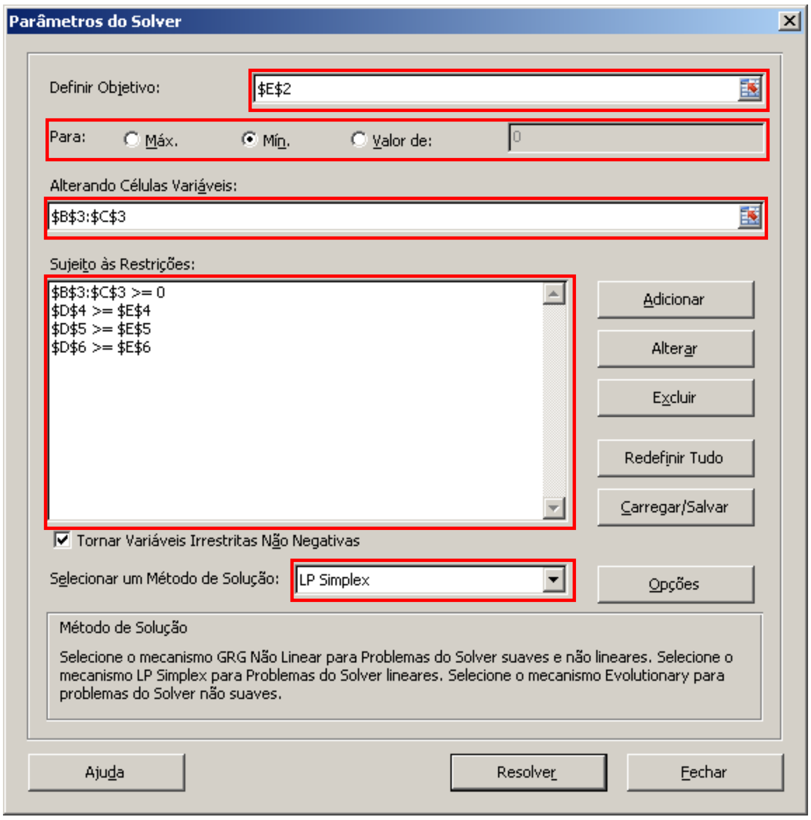
	A	B	C	D	E
1		Alimento 1 (x)	Alimento 2 (y)		
2	Função Objetiva	0,6	0,8	Z=	0
3	Quantidade	0	0		
4	Nutriente X	10	20	0	2
5	Nutriente Y	40	60	0	64
6	Nutriente Z	50	20	0	34
7					
8	Minimizar:	0,6x+0,8y			
9					
10	Sujeito a:	10x+20y≥2			
11		40x+60y≥64			
12		50x+20y≥34			
13					
14	Restrição de não negatividade:	x≥0 e y≥0			

Fórmulas:

CÉLULA	FÓRMULA
E2	=SOMARPRODUTO(B2:C2;B3:C3)
D4	=SOMARPRODUTO(B3:C3;B4:C4)
D5	=SOMARPRODUTO(B3:C3;B5:C5)
D6	=SOMARPRODUTO(B3:C3;B6:C6)

[4] MOREIRA, Daniel Augusto, **Pesquisa Operacional** - Curso Introdutório - 2ª Edição. São Paulo: Cengage Learning, 2010

Configuração do Solver:



APÊNDICE V

Encontrando a solução inicial de um problema de transporte usando o método do canto noroeste.

Dada a tabela de custos abaixo com quatro origens e três destinos, calcular a solução inicial do quadro de transportes pelo método do canto noroeste[5]:

	D_1	D_2	D_3	**Suprimentos**
O_1	*12*	*9*	*8*	**10**
O_2	*13*	*12*	*6*	**20**
O_3	*7*	*9*	*5*	**10**
O_4	*3*	*2*	*8*	**15**
Demanda	**8**	**30**	**17**	**55** / **55**

1º Passo – determinar a quantidade a ser transportada da origem O_1 para o destino D_1.

No método do canto noroeste inicia-se a distribuição das cargas a partir da célula localizada na intersecção da primeira linha com a primeira coluna, ou seja, a linha de transporte x_{11}. Como o destino D_1 demanda uma quantidade de 8 elementos e a origem O_1 dispõe de uma quantidade de 10 elementos, faz-se a alocação da carga e os ajustes na linha de Demanda e na coluna de Suprimentos. Neste caso, a demanda de 8 passa para 0 pois ela foi totalmente atendida, e os suprimentos passam de 10 para 2, pois houve uma sobra.

	D_1	D_2	D_3	**Suprimentos**
O_1	*8*			**~~10~~ 2**
O_2				**20**
O_3				**10**
O_4				**15**
Demanda	**~~8~~ 0**	**30**	**17**	

2º Passo – atendida a quantidade a ser transportada para o destino D_1, determinar a quantidade a ser transportada para o destino D_2.

Como a coluna do destino D_1 já foi atendida, move-se para a próxima coluna à direita, ou seja, D_2. Como ainda resta uma folga na linha da origem O_1, esgota-se esta folga e fazem-se os ajustes na linha da Demanda e na coluna de Suprimentos. Neste caso, a demanda de 30 passa para 28 e os suprimentos passam de 2 para 0, não sobrando mais nada para ser atribuído.

	D_1	D_2	D_3	**Suprimentos**
O_1	*8*	*2*		**~~10~~ ~~2~~ 0**
O_2				**20**
O_3				**10**
O_4				**15**
Demanda	**~~8~~ 0**	**~~30~~ 28**	**17**	

[5] Professor Mestre Matusalém Vieira Martins - http://www.professormatusalem.com

3º Passo – completar a quantidade a ser transportada para o destino D_2.

Como a coluna do destino D_2 ainda não foi atendida, e como a linha de origem O_1 não possui mais cargas para serem movidas, move-se para a próxima linha abaixo, ou seja, O_2. Como o destino D_2 ainda demanda uma quantidade de 28 elementos e a origem O_2 dispõe de uma quantidade de 20 elementos, faz-se a alocação da carga e os ajustes na linha de Demanda e na coluna de Suprimentos. Neste caso, a demanda de 28 passa para 8 pois ela ainda não foi totalmente atendida, e os suprimentos passam de 20 para 0, não havendo portanto nenhuma sobra.

	D_1	D_2	D_3	Suprimentos
O_1	*8*	*2*		~~10~~ ~~2~~ 0
O_2		*20*		~~20~~ 0
O_3				10
O_4				15
Demanda	~~8~~ 0	~~30~~ ~~28~~ 8	17	

4º Passo – completar a quantidade a ser transportada para o destino D_2.

Como a coluna do destino D_2 ainda não foi atendida, e como a linha de origem O_2 não possui mais cargas para serem movidas, move-se para a próxima linha abaixo, ou seja, O_3. Como o destino D_2 ainda demanda uma quantidade de 8 elementos e a origem O_3 dispõe de uma quantidade de 10 elementos, faz-se a alocação da carga e os ajustes na linha de Demanda e na coluna de Suprimentos. Neste caso, a demanda de 8 passa para 0 pois ela foi totalmente atendida, e os suprimentos passam de 10 para 2, pois houve uma sobra.

	D_1	D_2	D_3	Suprimentos
O_1	*8*	*2*		~~10~~ ~~2~~ 0
O_2		*20*		~~20~~ 0
O_3		*8*		~~10~~ 2
O_4				15
Demanda	~~8~~ 0	~~30~~ ~~28~~ ~~8~~ 0	17	

5º Passo – atendida a quantidade a ser transportada para o destino D_2, determinar a quantidade a ser transportada para o destino D_3.

Como a coluna do destino D_2 já foi atendida, move-se para a próxima coluna à direita, ou seja, D_3. Como ainda resta uma folga na linha da origem O_3, esgota-se esta folga e fazem-se os ajustes na linha da Demanda e na coluna de Suprimentos. Neste caso, a demanda de 17 passa para 15 e os suprimentos passam de 2 para 0, não sobrando mais nada para ser atribuído.

	D_1	D_2	D_3	Suprimentos
O_1	*8*	*2*		~~10~~ ~~2~~ 0
O_2		*20*		~~20~~ 0
O_3		*8*	*2*	~~10~~ ~~2~~ 0
O_4				15
Demanda	~~8~~ 0	~~30~~ ~~28~~ ~~8~~ 0	~~17~~ 15	

6º Passo – completar a quantidade a ser transportada para o destino D_3.

Como a coluna do destino D_3 ainda não foi atendida, e como a linha de origem O_3 não possui mais cargas para serem movidas, move-se para a próxima linha abaixo, ou seja, O_4. Como o destino D_3 ainda demanda uma quantidade de 15 elementos e a origem O_3 dispõe de uma quantidade de 15 elementos, faz-se a alocação da carga e os ajustes na linha de Demanda e na coluna de Suprimentos. Neste caso, a demanda de 15 passa para 0 pois ela foi totalmente atendida, e os suprimentos passam de 15 para 0, não sobrando mais nada para ser atribuído.

	D_1	**D_2**	**D_3**	**Suprimentos**
O_1	*8*	*2*		**~~10~~ ~~2~~ 0**
O_2		*20*		**~~20~~ 0**
O_3		*8*	*2*	**~~10~~ ~~2~~ 0**
O_4			*15*	**~~15~~ 0**
Demanda	**~~8~~ 0**	**~~30~~ ~~28~~ ~~8~~ 0**	**~~17~~ ~~15~~ 0**	

Solução:

Como a função objetiva é:

$$12x_{11}+9x_{12}+8x_{13}+13x_{21}+12x_{22}+6x_{23}+7x_{31}+9x_{32}+5x_{33}+3x_{41}+2x_{42}+8x_{43}$$

O custo total com transporte da solução inicial pelo método do canto noroeste será:

$$Z=12\times 8+9\times 2+8\times 0+13\times 0+12\times 20+6\times 0+7\times 0+9\times 8+5\times 2+3\times 0+2\times 0+8\times 15$$
$$Z=96+18+0+0+240+0+0+72+10+0+0+120$$
$$Z=556$$

APÊNDICE VI

Encontrando a solução inicial de um problema de transporte usando o método de Vogel.

Dada a tabela de custos abaixo com quatro origens e três destinos, calcular a solução inicial do quadro de transportes pelo método de Vogel[6]:

	D_1	D_2	D_3	Suprimentos
O_1	*12*	*9*	*8*	**10**
O_2	*13*	*12*	*6*	**20**
O_3	*7*	*9*	*5*	**10**
O_4	*3*	*2*	*8*	**15**
Demanda	**8**	**30**	**17**	**55** / **55**

1º Passo – calcular as penalidades das linhas e colunas da tabela de custos e determinar qual linha ou coluna possui a maior penalidade.

No método de Vogel, deve-se primeiro calcular as penalidades de todas as linhas e colunas da tabela de custos. Para isso, subtraem-se os dois menores custos de cada linha e de cada coluna e identifica-se qual a maior resultante.

	D_1	D_2	D_3	Penalidade
O_1	*12*	*9*	*8*	**9-8=1**
O_2	*13*	*12*	*6*	**12-6=6**
O_3	*7*	*9*	*5*	**7-5=2**
O_4	*3*	*2*	*8*	**3-2=1**
Penalidade	**7-3=4**	**9-2=7**	**6-5=1**	

2º Passo – selecionar a linha ou coluna com a maior penalidade e realizar a atribuição de carga.

Após a identificação da linha ou coluna com a maior penalidade, seleciona-se a célula com o menor custo e faz-se a atribuição de carga. Como o destino D_2 demanda uma quantidade de 30 elementos e a origem O_4 dispõe de uma quantidade de 15 elementos, faz-se a alocação da carga e os ajustes na linha de Demanda e na coluna de Suprimentos. Neste caso, a demanda de 30 passa para 15 e os suprimentos passam de 15 para 0, não sobrando mais nada para ser atribuído.

	D_1	D_2	D_3	Suprimentos
O_1				**10**
O_2				**20**
O_3				**10**
O_4		*15*		**~~15~~ 0**
Demanda	**8**	**~~30~~ 15**	**17**	

[6] Professor Mestre Matusalém Vieira Martins - http://www.professormatusalem.com

3º Passo – calcular novamente as penalidades das linhas e colunas da tabela de custos e determinar qual linha ou coluna possui a maior penalidade.

Devem-se calcular novamente as penalidades de todas as linhas e colunas da tabela de custos, com exceção da linha da origem O_4, pois não sobrou nada nesta origem para ser atribuído. Para isso, subtraem-se os dois menores custos de cada linha e de cada coluna e identifica-se qual a maior resultante.

	D_1	D_2	D_3	Penalidade
O_1	*12*	*9*	*8*	**9-8=1**
O_2	*13*	*12*	*6*	**12-6=6**
O_3	*7*	*9*	*5*	**7-5=2**
O_4	~~*3*~~	~~*2*~~	~~*8*~~	**-**
Penalidade	**12-7=5**	**9-9=0**	**6-5=1**	

4º Passo – selecionar a linha ou coluna com a maior penalidade e realizar a atribuição de carga.

Após a identificação da linha ou coluna com a maior penalidade, seleciona-se a célula com o menor custo e faz-se a atribuição de carga. Como o destino D_3 demanda uma quantidade de 17 elementos e a origem O_2 dispõe de uma quantidade de 20 elementos, faz-se a alocação da carga e os ajustes na linha de Demanda e na coluna de Suprimentos. Neste caso, a demanda de 17 passa para 0 pois ela foi totalmente atendida, e os suprimentos passam de 20 para 3, pois houve uma sobra.

	D_1	D_2	D_3	Suprimentos
O_1				**10**
O_2			*17*	**~~20~~ 3**
O_3				**10**
O_4		*15*		**~~15~~ 0**
Demanda	**8**	**~~30~~ 15**	**~~17~~ 0**	

5º Passo – calcular novamente as penalidades das linhas e colunas da tabela de custos e determinar qual linha ou coluna possui a maior penalidade.

Devem-se calcular novamente as penalidades de todas as linhas e colunas da tabela de custos, com exceção da coluna do destino D_3, pois este destino foi totalmente atendido. Para isso, subtraem-se os dois menores custos de cada linha e de cada coluna e identifica-se qual a maior resultante.

	D_1	D_2	D_3	Penalidade
O_1	*12*	*9*	~~*8*~~	**12-9=3**
O_2	*13*	*12*	~~*6*~~	**13-12=1**
O_3	*7*	*9*	~~*5*~~	**9-7=2**
O_4	~~*3*~~	~~*2*~~	~~*8*~~	**-**
Penalidade	**12-7=5**	**9-9=0**	**-**	

6º Passo – selecionar a linha ou coluna com a maior penalidade e realizar a atribuição de carga.

Após a identificação da linha ou coluna com a maior penalidade, seleciona-se a célula com o menor custo e faz-se a atribuição de carga. Como o destino D_1 demanda uma quantidade de 8 elementos e a origem O_3 dispõe de uma quantidade de 10 elementos, faz-se a alocação da carga e os ajustes na linha de Demanda e na coluna de Suprimentos. Neste caso, a demanda de 8 passa para 0 pois ela foi totalmente atendida, e os suprimentos passam de 10 para 2, pois houve uma sobra.

	D_1	**D_2**	**D_3**	**Suprimentos**
O_1				**10**
O_2			*17*	**~~20~~ 3**
O_3	*8*			**~~10~~ 2**
O_4		*15*		**~~15~~ 0**
Demanda	**~~8~~ 0**	**~~30~~ 15**	**~~17~~ 0**	

7º Passo – calcular novamente as penalidades das linhas e colunas da tabela de custos e determinar qual linha ou coluna possui a maior penalidade.

Devem-se calcular novamente as penalidades de todas as linhas e colunas da tabela de custos, com exceção da coluna do destino D_1, pois este destino foi totalmente atendido. Para isso, subtraem-se os dois menores custos de cada linha e de cada coluna e identifica-se qual a maior resultante.

	D_1	**D_2**	**D_3**	**Penalidade**
O_1	*12*	*9*	*8*	**9**
O_2	*13*	*12*	*6*	**12**
O_3	*7*	*9*	*5*	**9**
O_4	*3*	*2*	*8*	**-**
Penalidade	**-**	**9-9=0**	**-**	

8º Passo – selecionar a linha ou coluna com a maior penalidade e realizar a atribuição de carga.

Após a identificação da linha ou coluna com a maior penalidade, seleciona-se a célula com o menor custo e faz-se a atribuição de carga. Como o destino D_2 demanda uma quantidade de 15 elementos e a origem O_2 dispõe de uma quantidade de 2 elementos, faz-se a alocação da carga e os ajustes na linha de Demanda e na coluna de Suprimentos. Neste caso, a demanda de 15 passa para 12 e os suprimentos passam de 3 para 0, não sobrando mais nada para ser atribuído.

	D_1	**D_2**	**D_3**	**Suprimentos**
O_1				**10**
O_2		*3*	*17*	**~~20~~ ~~3~~ 0**
O_3	*8*			**~~10~~ 2**
O_4		*15*		**~~15~~ 0**
Demanda	**~~8~~ 0**	**~~30~~ ~~15~~ 12**	**~~17~~ 0**	

9º Passo – calcular novamente as penalidades das linhas e colunas da tabela de custos e determinar qual linha ou coluna possui a maior penalidade.

Devem-se calcular novamente as penalidades de todas as linhas e colunas da tabela de custos, com exceção da linha da origem O_2, pois não sobrou nada nesta origem para ser atribuído. Para isso, subtraem-se os dois menores custos de cada linha e de cada coluna e identifica-se qual a maior resultante.

	D_1	D_2	D_3	Penalidade
O_1	~~*12*~~	*9*	~~*8*~~	**9**
O_2	~~*13*~~	~~*12*~~	~~*6*~~	**-**
O_3	~~*7*~~	*9*	~~*5*~~	**9**
O_4	~~*3*~~	~~*2*~~	~~*8*~~	**-**
Penalidade	**-**	**9-9=0**	**-**	

10º Passo – selecionar a linha ou coluna com a maior penalidade e realizar a atribuição de carga.

Após a identificação da linha ou coluna com a maior penalidade, seleciona-se a célula com o menor custo e faz-se a atribuição de carga. Quando existem mais de uma linha ou coluna com valor máximo de penalidades iguais, pode-se escolher qualquer uma delas. Como o destino D_2 demanda uma quantidade de 12 elementos e a origem O_1 dispõe de uma quantidade de 10 elementos, faz-se a alocação da carga e os ajustes na linha de Demanda e na coluna de Suprimentos. Neste caso, a demanda de 12 passa para 2 e os suprimentos passam de 10 para 0, não sobrando mais nada para ser atribuído.

	D_1	D_2	D_3	Suprimentos
O_1		*10*		**~~10~~ 0**
O_2		*3*	*17*	**~~20~~ ~~3~~ 0**
O_3	*8*			**~~10~~ 2**
O_4		*15*		**~~15~~ 0**
Demanda	**~~8~~ 0**	**~~30~~ ~~15~~ ~~12~~ 2**	**~~17~~ 0**	

11º Passo – calcular novamente as penalidades das linhas e colunas da tabela de custos e determinar qual linha ou coluna possui a maior penalidade.

Devem-se calcular novamente as penalidades de todas as linhas e colunas da tabela de custos, com exceção da linha da origem O_1, pois não sobrou nada nesta origem para ser atribuído. Para isso, subtraem-se os dois menores custos de cada linha e de cada coluna e identifica-se qual a maior resultante.

	D_1	D_2	D_3	Penalidade
O_1	~~*12*~~	~~*9*~~	~~*8*~~	**-**
O_2	~~*13*~~	~~*12*~~	~~*6*~~	**-**
O_3	~~*7*~~	*9*	~~*5*~~	**9**
O_4	~~*3*~~	~~*2*~~	~~*8*~~	**-**
Penalidade	**-**	**9-9=0**	**-**	

12º Passo – selecionar a linha ou coluna com a maior penalidade e realizar a atribuição de carga.

Após a identificação da linha ou coluna com a maior penalidade, seleciona-se a célula com o menor custo e faz-se a atribuição de carga. Como o destino D_2 demanda uma quantidade de 2 elementos e a origem O_3 dispõe de uma quantidade de 2 elementos, faz-se a alocação da carga e os ajustes na linha de Demanda e na coluna de Suprimentos. . Neste caso, a demanda de 2 passa para 0 pois ela foi totalmente atendida, e os suprimentos passam de 2 para 0, não sobrando mais nada para ser atribuído.

	D_1	**D_2**	**D_3**	**Suprimentos**
O_1		*10*		**~~10~~ 0**
O_2		*3*	*17*	**~~20~~ ~~3~~ 0**
O_3	*8*	*2*		**~~10~~ ~~2~~ 0**
O_4		*15*		**~~15~~ 0**
Demanda	**~~8~~ 0**	**~~30~~ ~~15~~ ~~12~~ ~~2~~ 0**	**~~17~~ 0**	

Solução:

Como a função objetiva é:

$$12x_{11}+9x_{12}+8x_{13}+13x_{21}+12x_{22}+6x_{23}+7x_{31}+9x_{32}+5x_{33}+3x_{41}+2x_{42}+8x_{43}$$

O custo total com transporte da solução inicial pelo método de Vogel será:

$$Z = 12\times0+9\times10+8\times0+13\times0+12\times3+6\times17+7\times8+9\times2+5\times0+3\times0+2\times15+8\times0$$
$$Z = 0+90+0+0+36+102+56+18+0+0+30+0$$
$$Z = 332$$

APÊNDICE VII

Resolvendo um problema de transporte pelo Excel Solver:

A Docelar é uma florescente fábrica de fogões domésticos, com escritórios centrais em São Paulo e fábricas em Londrina, Salvador e São Paulo. Atualmente, um dos modelos mais conceituados da Docelar é o Brasileirinho 05, um fogão de seis bocas de grande aceitação em todo o Brasil. Apesar de contar com uma rede de revendedores, a Docelar pretende agora trabalhar com três grandes armazéns próprios, localizados em Bauru, Porto Alegre e Campo Grande. Londrina é capaz de produzir 5.000 unidades mensais do Brasileirinho 05, enquanto a fábrica de São Paulo consegue produzir 30.000 unidades mensais. Já Salvador tem uma capacidade intermediária de produção: 10.000 unidades por mês. Por outro lado, os armazéns que devem ser reabastecidos têm as seguintes demandas:

- Bauru: 15.000 unidades por mês;
- Porto Alegre: 20.000 unidades por mês;
- Campo Grande: 10.000 unidades por mês.

Os custos unitários de transporte, de cada fábrica a cada um dos armazéns, são mostrados na tabela a seguir:

	Bauru	**Porto Alegre**	**Campo Grande**
Londrina	*40*	*60*	*60*
Salvador	*80*	*90*	*70*
São Paulo	*40*	*60*	*50*

Pede-se: determinar as quantidades que devem ser despachadas de cada fábrica para cada armazém, de forma a minimizar o custo total de transporte. Calcular também quanto vale o custo mínimo de transporte.[7]

[7] MOREIRA, Daniel Augusto, **Pesquisa Operacional** - Curso Introdutório - 2ª Edição. São Paulo: Cengage Learning, 2010

Problema transportado para o Excel:

L2 | f_x | =SOMARPRODUTO(B2:J2;B3:J3)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1		x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{31}	x_{32}	x_{33}		
2	**Função Objetiva**	40	60	60	80	90	70	40	60	50	Z=	0
3	**Quantidade**	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
4	**Londrina**	1	1	1	-	-	-	-	-	-	0	5.000
5	**Salvador**	-	-	-	1	1	1	-	-	-	0	10.000
6	**São Paulo**	-	-	-	-	-	-	1	1	1	0	30.000
7	**Bauru**	1	-	-	1	-	-	1	-	-	0	15.000
8	**Porto Alegre**	-	1	-	-	1	-	-	1	-	0	20.000
9	**Campo Grande**	-	-	1	-	-	1	-	-	1	0	10.000
10												
11	Minimizar:	$40x_{11}+60x_{12}+60x_{13}+80x_{21}+90x_{22}+70x_{23}+40x_{31}+60x_{32}+50x_{33}$										
12												
13	Sujeito a:	$x_{11}+x_{12}+x_{13}\leq 5000$										
14		$x_{21}+x_{22}+x_{23}\leq 10000$										
15		$x_{31}+x_{32}+x_{33}\leq 30000$										
16		$x_{11}+x_{21}+x_{31}=15000$										
17		$x_{12}+x_{22}+x_{32}=20000$										
18		$x_{13}+x_{23}+x_{33}=10000$										
19												
20	Restrição de não negatividade:	$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32}, x_{33}\geq 0$										

Fórmulas:

CÉLULA	FÓRMULA
L2	=SOMARPRODUTO(B2:J2;B3:J3)
K4	=SOMARPRODUTO(B3:J3;B4:J4)
K5	=SOMARPRODUTO(B3:J3;B5:J5)
K6	=SOMARPRODUTO(B3:J3;B6:J6)
K7	=SOMARPRODUTO(B3:J3;B7:J7)
K8	=SOMARPRODUTO(B3:J3;B8:J8)
K9	=SOMARPRODUTO(B3:J3;B9:J9)

Configuração do Solver: